Chapitre : calcul littéral 2 (Equation)

SAVOIR-FAIRE À ACQUÉRIR

- ☐ Connaître le vocabulaire d'une équation.
- ☐ Connaître les techniques de résolution d'une équation et savoir les mettre en pratique.
- ☐ Savoir mettre un problème sous forme d'équation et pouvoir le résoudre.

Plan du cours

1 Vocabulaire des équations

DÉFINITION. *(Égalité)*

Une **égalité** est une phrase mathématique qui contient un symbole « = » et deux membres de part et d'autre du signe =.

Remarque. Il faut distinguer l'égalité de sa véracité. Une égalité peut-être vaie ou fausse. Par exemple, $10-6=4$ est une égalité vraie tandis que $2\times3=17+5$ est une égalité fausse ; on écrira alors $2\times3\neq17+5$.

DÉFINITION. *(Equation)*

Une **équation** est une égalité qui comporte des lettres dans un ou dans les deux membres de l'égalité. Les lettres sont appelées **inconnues**.

<u>Exemples</u>.

- $7+x=1,5$ est une *équation d'inconnue* x. Le membre de gauche est $7+x$ et celui de droite est $1,5$. L'égalité est vraie ou fausse en fonction des valeurs prises par l'inconnue x.
- $5+3x=x^2$ est une équation à une inconnue x.
- $4a+3=10b$ est une équation à deux inconnues : a et b.

DÉFINITION. *(Résoudre une équation)*

Résoudre une équation d'inconnue x revient à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie. Les valeurs trouvées sont appelées les **solutions** de l'équation.

<u>Exemples</u>.

1. Considérons l'équation $2t+10=0$. Pour $t=0$, l'égalité est fausse donc0 n'est pas une solution de l'équation. Pour $t=-5$, l'égalité devient vraie donc -5 est une solution de l'équation.
2. Considérons l'équation $n^2-5n=-6$. Pour $n=2$, l'égalité est vraie, on peut donc dire que 2 est une solution de l'équation.

Remarque. Certaines équations peuvent ne pas avoir de solutions tandis que d'autres peuvent avoir plusieurs voir même une infinité de solutions.

— L'équation d'inconnue y : $y=y+5$ n'a aucune solution.
— L'équation d'inconnue z : $z^2=7$ a deux solutions qui sont $z=\sqrt{7}$ et $z=-\sqrt{7}$.

2 Résolution d'équations

DÉFINITION. ***(Équations équivalentes)***

On dit que deux équations sont **équivalentes** si elles ont toutes les mêmes solutions. On le notera avec le symbole $\iff$.

EXEMPLES.

1. L'équation $y = -4y + 10$ a pour unique solution $y = 2$. L'équation $2y = 4$ a aussi pour unique solution $y = 2$. Ainsi ces deux équations sont équivalentes et on notera $y = -4y + 10 \iff 2y = 4$.
2. L'équation $x^2 + x = 0$ a, en l'occurence, 0 pour solution. L'équation $2x + 1 = 2$ n'a pas pour solution 0. Ces deux équations ne sont donc pas équivalentes.

PROPRIÉTÉ. ***(Opérations élémentaires sur des équations)***

Deux équations restent équivalentes si :

1. on ajoute ou si on soustrait un même nombre **aux deux membres** de l'égalité.
2. on multiplie ou si on divise par un même nombre non nul **les deux membres** de l'égalité.

Méthode. Pour résoudre une équation, le but est de se ramener à des équations équivalentes plus simples grâce aux deux opérations élémentaires précédentes afin d'obtenir plus facilement les solutions.

EXEMPLES.

1. On souhaite résoudre l'équation : $x + 7 = 10$.

$$\begin{aligned} & x + 7 = 10 \\ \iff & x + 7 - 7 = 10 - 7 && -7 \textit{ aux deux membres} \\ \iff & x = 3 \end{aligned}$$

On trouve donc que la solution est 3.

2. On souhaite résoudre l'équation $5a - 2 = 18$.

$$\begin{aligned} & 5a - 2 = 18 \\ \iff & 5a - 2 + 2 = 18 + 2 && +2 \textit{ aux deux membres} \\ \iff & 5a = 20 \\ \iff & 5a \div 5 = 20 \div 5 && \div 5 \textit{ aux deux membres} \\ \iff & a = 4 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de notre équation est 4.

3. On souhaite résoudre l'équation $10z + 2 = 6z$.

$$\begin{aligned} & 10z + 2 = 6z \\ \iff & 10z + 2 - 6z = 6z - 6z && -6z \textit{ aux deux membres} \\ \iff & 4z + 2 = 0 \\ \iff & 4z + 2 - 2 = 0 - 2 && -2 \textit{ aux deux membres} \\ \iff & 4z = -2 \\ \iff & 4z \div 4 = -2 \div 4 && \div 4 \textit{ aux deux membres} \\ \iff & z = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de notre équation est $\frac{-1}{2}$.

$\Longrightarrow$ En quatrième, on va s'intéresser à résoudre un type d'équation particulier :

DÉFINITION. ***(Équations du premier degré à une inconnue)***

On appelle **équation du premier degré à une inconnue** x, toute équation qui peut se mettre sous la forme $ax + b = 0$, où x est l'inconnue et a et b sont des nombres donnés, et a non nul.

PROPRIÉTÉ. ***(Solution équation du premier degré)***

Toute équation du premier degré à une inconnue admet une unique solution.

EXEMPLES.

1. L'équation $-7y + 2 = 0$ est une équation du premier degré à une inconnue de la forme $ay + b = 0$ où y est l'inconnue et $a = -7$ et $b = 2$.
2. L'équation $2x - 5 = 2$ est une équation du premier degré à une inconnue c ar :

$$\begin{aligned} & 2x - 5 = 2 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x - 5 - 2 = 2 - 2 \quad -2 \textit{ aux deux membres} \\ \Longleftrightarrow\ & 2x - 7 = 0 \end{aligned}$$

   On a donc bien une équation du premier degré à une inconnue de la forme $ax + b = 0$ où l'inconnue est x et $a = 2$ et $b = -7$.

   On pourrait aussi montrer qu'elle a pour unique solution $x = \dfrac{7}{2}$.

3 Mise en équation et résolution de problèmes

En mathématique, lorsqu'on est face à un problème, il se peut qu'on ait besoin d'utiliser le calcul littéral, on appelle cela **la mise en équation d'un problème**.

Méthode : Pour mettre un problème en équation, on peut suivre les étapes suivantes.

— **Étape 1** : BIEN lire l'énoncé pour comprendre ce que l'on cherche.

— **Étape 2** : Choisir une/des lettre(s) pour nommer les quantités inconnues présentent dans le problème et/ou que l'on recherche.

— **Étape 3** : À l'aide des hypothèses de l'énoncé, produire une égalité qui retranscrit le problème avec les inconnues.

— **Étape 4** : Résoudre l'équation obtenue précédemment à l'aide des opérations élémentaires et/ou d'autres techniques (développer, factoriser, ...).

EXEMPLE.

1. Pour arriver à 100 ans je dois doubler mon âge et ajouter 16. Quel est mon âge actuel ?